Feuille de TD

Dénombrement, mesures de probabilités

Dénombrement, sommabilité

Exercice 1.
Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus A)$?
2. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 2. Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que la famille $(\frac{x^n}{1-x^n})_{n\geq 1}$ est sommable.
2. Montrer que la famille $(x^{n(k+1)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable.
   Que vaut sa somme $\sum_{n\geq 1, k\geq 0} x^{n(k+1)}$?
3. On pose $A_p = \{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times N \text{ tq } n(k+1) = p\}$, pour $p \geq 1$.
   Vérifier que la famille $(A_p)_p$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
4. On pose $d(p)$ le nombre de diviseurs de p.
   Calculer $Card(A_p)$.
5. Montrer que l'on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.$$

Exercice 3.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).

1. Combien vaut $Card(\Omega)$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $Card(A)$.
   On pourra faire des exemples pour de petites valeurs de n ($n = 3, 4, 5$), pour s'aider.
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $Card(A)$.

Exercice 4.

1. Vérifier que la famille des $A_k = \{(n,p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } n+p=k\}$, $k \geq 0$, forme une partition de $\mathbb{N}^2$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On regarde la famille $\left(\dfrac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} = (a_{n,p})$.
   Calculer $\sum_{(n,p)\in A_k} a_{n,p}$.
3. En déduire tous les nombres réels α tels que la famille $\left(\dfrac{1}{(n+p+1)^\alpha}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Indiquer quel résultat du cours est nécessaire ici.
   Donner la valeur de la somme de la famille.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
2. Quel est l'ensemble $\bar{A}$?
3. Calculer $Card(\bar{A})$.
4. Calculer $Card(A)$.

Exercice 6.

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$
2. Pour quels nombres $\alpha > 1$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ est-elle finie ?
3. On pose $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(n,k), k \geq n+1\}$. On pose $a_{n,k} = \frac{1}{k^\alpha}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 1$ la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in\Omega}$ est-elle sommable ?
4. Montrer qu'on a alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$
On pourra écrire autrement l'ensemble Ω et utiliser le théorème de Fubini.

Exercice 7. (*)
Soient $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. On note $D_{n,k}$ le nombre de permutations sur $\{1, \dots, n\}$ avec k points fixes.
On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$.
d_n est le nombre de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.
7. Montrer que la proportion de permutations sans point fixes de S_n converge vers un nombre réel l, que l'on déterminera.

Exercice 8.
Soit Ω l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que Ω est dénombrable.
On pourra utiliser le fait que la réunion dénombrable d'ensembles dénombrables ou finis est dénombrable.

■ *Mesures de probabilités* ■

Exercice 9. On lance deux dés à 6 faces.
• Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Donner son cardinal.
On suppose que les dés sont équilibrés et lancés sans aucun biais.
• Quelle est la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui correspond à ce lancer ?
• Quelle est la probabilité que :

1. « au moins un des dés marque 6 » ?
2. « au moins un des dés donne un résultat pair » ?
3. « la somme des résultats des deux dés soit paire » ?

Exercice 10.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).
On munit le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probas uniforme $\mathbb{P}$.

1. On note C l'ensemble de tous les tirages qui commencent par 1.
Calculer $\mathbb{P}(C)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
Calculer $\mathbb{P}(A)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
Calculer $\mathbb{P}(A)$.
Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?

Exercice 11.

1. Soit $m \geq 1$. Sur $\{1, \ldots, m\}$ écrire la mesure de probabilité uniforme U comme somme de mesures de *Dirac* δ_w.
   Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une sigma-algèbre sur Ω.
   Soient $P_1, \ldots, P_m$ des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soient $p_1, \ldots, p_m \in [0, 1]$ des réels tels que $p_1 + \ldots + p_m = 1$.
2. Montrer que la fonction $\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{m} p_k P_k$ est une mesure de probabilité.
   Soient maintenant $(Q_n)_{n \geq 0}$ des mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et $(q_n)_{n \geq 0}$ des réels positifs tels que $\sum_{k \geq 0} q_k = 1$.
3. Montrer que la fonction $f = \sum_{k \geq 0} q_k Q_k$ est bien définie sur $\mathcal{A}$.
4. On veut montrer que f est une mesure de probabilité. Quel théorème du cours est utile dans la preuve ?

Exercice 12. Soit Ω un ensemble non-vide. Soit A une partie de Ω.
• Quelles sont les 3 opérations que l'on peut faire dans une sigma-algèbre ? Quels sont les éléments toujours présents dans une sigma-algèbre ?
• Montrer que $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une sigma-algèbre.
• Si Ω est fini ou dénombrable, quelle est la seule sigma-algèbre sur Ω qui contient tous les singletons ?

Exercice 13. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On suppose que les personnes de l'assemblée ont été choisies sans aucun biais parmi la population.
2. Quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à ce choix ?
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
3. Calculer $\mathbb{P}(\bar{A})$.
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 14.
Soient $1 \leq p \leq n$. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.
On pose sur le couple $(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$ la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. Combien vaut $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$?
2. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(\emptyset)$ et $\mathbb{P}(\{\emptyset\})$.
3. On pose B l'ensemble des parties de E telles qui contiennent exactement un élément de A.
   Calculer $\mathbb{P}(B)$.
   Comment varie cette probabilité en fonction de n et de p ?

Exercice 15.
Soit $n \geq 1$. Soit $E = \{1, \ldots, n\}$.

1. Exprimer la mesure de probas uniforme U sur $(E, \mathcal{P}(E))$ comme combinaison linéaire de mesures de Dirac δ_ω. On pose $f = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}\delta_n$.
2. Quelle expérience aléatoire peut être associée à la mesure de probabilité f ?
3. Calculer $f(\{1, n\})$ et $f(2\mathbb{N} \cap E)$.

Exercice 16. Dans un jeu de 32 cartes, on a remplacé une carte autre que l'as de pique ($\spadesuit$) par un second as de pique.
Un joueur choisit au hasard de façon uniforme 3 cartes.
• Quel ensemble Ω et quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ faut-il prendre pour modéliser cette expérience ?
• Quelle est la probabilité qu'il s'aperçoive de la tricherie ?

Exercice 17. Soit $N > 0$. Une boîte contient $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$.
On tire N boules successivement sans les remettre.

1. Donner l'ensemble Ω qui représente tous les tirages possibles.
   Calculer $Card(\Omega)$. On note l'événement.

$$A : \text{« on tire au moins un numéro inférieur ou égal à } N \text{ »}$$

.

2. Calculer $Card(\bar{A})$, et en déduire $Card(A)$.
On suppose que les boules sont toutes identiques (sauf leur numéro), et qu'on mélange les boules de la boîte avant chaque tirage.

3. Quelle mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à cette façon de tirer les boules ?
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
5. En utilisant la formule de Stirling

$$N! \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N},$$

étudier la limite de $P(A)$ quand N tend vers ∞ ?

Exercice 18. Soient $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble et $x,\ y$ deux réels.
Montrer qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que

$$\mathbb{P}(\{a, b\}) = x \text{ et } \mathbb{P}(\{b, c\}) = y$$

si et seulement si $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ et $x + y \geq 1$.
On pourra s'aider de l'exercice ..

Exercice 19. Soit Ω un ensemble. Soient $A_n \subset \Omega$.
On appelle *limite supérieure* des A_n, notée $\limsup_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n.
On appelle *limite inférieure* des A_n, notée $\liminf_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux.

1. Écrire les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
Les traduire en termes ensemblistes à l'aide de $\bigcap$ et $\bigcup$.
2. Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur Ω.
Montrer que si $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ appartiennent aussi à $\mathcal{A}$.
3. Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :
   (a) $A_n =]-\infty, n]$;
   (b) $A_n =]-\infty, -n]$;
   (c) $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$;
   (d) $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

Exercice 20. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

Probabilités conditionnlles, événements indépendants

Exercice 21.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8} \quad , \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$.

Exercice 22. Soient $N \geq 2$ et $p \in [0, 1]$.
On place N coffres dans une pièce. Avec une probabilité p on place un trésor dans l'un de ces coffres. Si on place le trésor, on choisit un coffre de façon équiprobable ("même probabilité").
• Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui modélise l'expérience.
On pourra écrire la loi de la mesure de probas $\mathbb{P}$.
• Une personne a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'elle trouve le trésor dans le dernier coffre ?
• Donner un équivalent de cette probabilité quand $N \to +\infty$.

Exercice 23. Vous êtes devant une porte fermée. Vous avez n clefs. Une seule clef ouvre la porte. Vous décidez d'essayer les clefs l'une après l'autre, au hasard uniforme.

1. Quel est l'univers Ω ?
On ne cherchera pas à calculer explicitement la mesure de probas $\mathbb{P}$ qui modélise cet exemple.
2. Soit, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement E_i : « le i-ème essai est un échec ». Calculer $\mathbb{P}(E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2 \mid E_1)$.

3. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement S_k : « la porte s'ouvre au k-ième essai » en utilisant les événements E_i et leur contraire.
4. En déduire la probabilité u_k que la porte s'ouvre au k-ième essai.
5. Retrouver directement ce résultat en utilisant un ensemble Ω' plus simple, muni de la mesure uniforme, grâce à un argument de probabilités égales (d'équiprobabilité).

Exercice 24. Soient $b, d, r \geq 0$.
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On réalise l'expérience suivante :
• On tire une boule de l'urne au hasard uniforme, et on note sa couleur.
• On remet la boule dans l'urne, et on ajoute d boules de la même couleur.
On répète l'expérience autant de fois que l'on veut.
Soit $n \geq 1$. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.
On pourra utiliser une récurrence, et des probabilités conditionnelles sachant le résultat du 1er tirage.